

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ –
08.02.2026
CLASA a VII-a

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

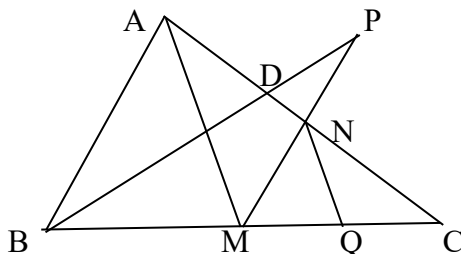
Notă: - Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.

- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului precizat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu.

Subiectul I (20 puncte)

În triunghiul ABC , $AB < AC$, semidreapta BD este bisectoarea unghiului ABC , $D \in AC$ și AM este mediană cu $M \in BC$. Prin M se duce paralela MN la latura AB , $N \in AC$, care se intersectează cu BD în P și prin N se duce paralela NQ la AM , $Q \in BC$. Arătați că $MP = 2QC$.

Soluție:



$$\triangle ABC: \left. \begin{array}{l} AM - \text{mediană} \\ BM = MC \\ N \in AC \end{array} \right\} \Rightarrow MN \parallel AB \Rightarrow AN = NC \text{ (Reciproca teoremei liniei mijlocii)}$$

$$\triangle AMC: \left. \begin{array}{l} NM - \text{mediană} \\ AN = NC \\ Q \in MC \end{array} \right\} \Rightarrow NQ \parallel AM \Rightarrow MQ = QC \text{ (Reciproca teoremei liniei mijlocii)}$$

$$\Rightarrow QC = \frac{MC}{2} = \frac{BM}{2} \quad (1)$$

$$\triangle ABC: \left. \begin{array}{l} (BD - \text{bisectoare pentru } \angle ABC \Rightarrow \angle ABP \equiv \angle PBC \\ AB \parallel MP, BP - \text{secantă} \Rightarrow \angle ABP \equiv \angle BPM \text{ (alterne interne)} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle PBM \equiv \angle BPM \Rightarrow \triangle BMP - \text{isoscel cu } BM = MP \quad (2)$$

$$\text{Din (1), (2)} \Rightarrow QC = \frac{MP}{2} \Leftrightarrow MP = 2QC$$



Detalii de rezolvare	Barem asociat
Deduce că $AN = NC$ (folosind Teorema reciprocă a liniei mijlocii)	4p
Deduce că $MQ = QC$ (folosind Teorema reciprocă a liniei mijlocii)	4p
$\Rightarrow QC = \frac{MC}{2} = \frac{BM}{2} (1)$	3p
Deduce că $\triangle BMP$ – isoscel cu $BM = MP$ (2)	7p
Din relațiile (1) și (2) se obține egalitatea $MP = 2QC$	2p
Total	20p

Subiectul II (20 puncte)

Determinați $a \in \mathbb{N}$ astfel încât $\sqrt{\frac{2025a-2026}{2023a-2024}} \in \mathbb{N}$.

Soluție:

$$\sqrt{\frac{2025a-2026}{2023a-2024}} \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{2025a-2026}{2023a-2024} \in \mathbb{N} \Rightarrow 2025a - 2026 : 2023a - 2024$$

$$\left. \begin{array}{l} 2025a - 2026 : 2023a - 2024 \Rightarrow 2023 \cdot 2025a - 2023 \cdot 2026 : 2023a - 2024 \\ 2023a - 2024 : 2023a - 2024 \Rightarrow 2023 \cdot 2025a - 2024 \cdot 2025 : 2023a - 2024 \end{array} \right\} \xRightarrow{(-)}$$

$$\Rightarrow 2024 \cdot 2025 - 2023 \cdot 2026 : 2023a - 2024 \Rightarrow 4098600 - 4098598 : 2023a - 2024 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 : 2023a - 2024 \Rightarrow 2023a - 2024 \in D_2 = \{-2, -1, 1, 2\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2023a \in \{2022, 2023, 2025, 2026\}, a \in \mathbb{N} \Rightarrow a = 1$$

Detalii de rezolvare	Barem asociat
$\sqrt{\frac{2025a-2026}{2023a-2024}} \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{2025a-2026}{2023a-2024} \in \mathbb{N}$	6p
Deduce că $2025a - 2026 : 2023a - 2024$	2p
Deduce că $2024 \cdot 2025 - 2023 \cdot 2026 : 2023a - 2024$	2p
Deduce că $2023a - 2024 \in D_2 = \{-2, -1, 1, 2\}$	5p
Pentru $a \in \mathbb{N}$, determină $a = 1$	5p
Total	20p

Subiectul III (25 puncte)

Se consideră mulțimea: $A = \left\{ \frac{\sqrt{5}-\sqrt{1}}{\sqrt{1 \cdot 5}}, \frac{\sqrt{9}-\sqrt{5}}{\sqrt{5 \cdot 9}}, \frac{\sqrt{13}-\sqrt{9}}{\sqrt{9 \cdot 13}}, \dots, \frac{\sqrt{2025}-\sqrt{2021}}{\sqrt{2021 \cdot 2025}} \right\}$

- a) Să se calculeze suma elementelor din mulțimea A .
 b) Arătați că suma elementelor oricărei submulțimi nevide a lui A nu este un număr natural.

Soluție:

- a) Suma elementelor mulțimii A este:

$$S = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{1}}{\sqrt{1 \cdot 5}} + \frac{\sqrt{9}-\sqrt{5}}{\sqrt{5 \cdot 9}} + \frac{\sqrt{13}-\sqrt{9}}{\sqrt{9 \cdot 13}} + \dots + \frac{\sqrt{2025}-\sqrt{2021}}{\sqrt{2021 \cdot 2025}}$$

$$S = \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{9}} - \frac{1}{\sqrt{13}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2021}} - \frac{1}{\sqrt{2025}}$$

$$S = \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2025}} = 1 - \frac{1}{45} = \frac{44}{45}$$

- b) Fie B o submulțime nevidă oarecare a lui A și S' suma elementelor sale.

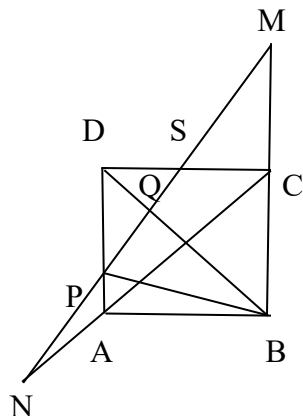
Din faptul că toate elementele din A sunt pozitive și $S < 1$, rezultă că $0 < S' < 1$.

Rezultă că S' nu este număr natural.

Detalii de rezolvare	Barem asociat
a) Deduce că $S = \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{9}} - \frac{1}{\sqrt{13}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2021}} - \frac{1}{\sqrt{2025}}$	10p
Deduce că $S = \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2025}} = 1 - \frac{1}{45} = \frac{44}{45}$	5p
b) Deduce că $S < 1$	5p
Obține că $0 < S' < 1$, de unde rezultă că S' nu este număr natural.	5p
Total	25p

Subiectul IV (25 puncte)

Fie pătratul $ABCD$. Notăm cu M simetricul punctului B față de punctul C . Pe semidreapta $[CA$ se consideră punctul N astfel încât $A \in (CN)$ și $\angle NMB = 30^\circ$. Dreapta MN intersectează pe AD în P și pe BD în Q . Demonstrați că $BP = BQ$.

Soluție:

Fie $MN \cap DC = \{S\}$

$AD \parallel MB$, MP – secantă $\Rightarrow \angle DPS \equiv \angle BMS$ – alterne interne

$\triangle MCS$ – dreptunghic în $C \Rightarrow SC = \frac{MS}{2}$ (din teorema unghiului de 30°) $\Rightarrow MS = 2SC$

$\triangle DPS$ – dreptunghic în $D \Rightarrow DS = \frac{PS}{2}$ (din teorema unghiului de 30°) $\Rightarrow PS = 2DS$

$\left. \begin{array}{l} MP = MS + PS = 2SC + 2DS = 2DC \\ BC = CM \Rightarrow BM = 2BC = 2DC \end{array} \right\} \Rightarrow MP = BM \Rightarrow \triangle MBP$ – isoscel cu $\angle BMP = 30^\circ$

$\Rightarrow \angle MPB = \angle MBP = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ$

$\angle MSC = 60^\circ \Rightarrow \angle DSP = 60^\circ$

$\triangle DQS$: $\angle SDQ = \angle CDB = 45^\circ$, $\angle DSQ = \angle DSP = 60^\circ \Rightarrow \angle DQS = 180^\circ - (45^\circ + 60^\circ) = 75^\circ$

$\angle DQS = \angle PQB = 75^\circ$

$\triangle BPQ$: $\angle QPB = \angle MPB = 75^\circ = \angle PQB \Rightarrow \triangle BPQ$ – isoscel $\Rightarrow BP = BQ$.



Detalii de rezolvare	Barem asociat
Deduce $\sphericalangle DPS \equiv \sphericalangle BMS$ – alterne interne	2p
Deduce $MS = 2 SC$	3p
Deduce $PS = 2 DS$	3p
Deduce $MP = 2 DC$	2p
Deduce $\triangle MBP$ – isoscel cu $\sphericalangle BMP = 30^\circ$ și $\sphericalangle MPB = \sphericalangle MBP = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ$	5p
Deduce $\sphericalangle DQS = 180^\circ - (45^\circ + 60^\circ) = 75^\circ$	5p
Argumentează $\triangle BPQ$: $\sphericalangle QPB = \sphericalangle MPB = 75^\circ = \sphericalangle PQB$ $\Rightarrow \triangle BPQ$ – isoscel $\Rightarrow BP = BQ$.	5p
Total	25p